

**Recasages possibles :** 223, 224, 226, 230

**Référence :** Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements, 2de édition, BERNIS<sup>2</sup> (p. 145-149).

**Développement 1**

**Théorème 1** Soient  $a > 0$  et  $f$  une fonction continue sur  $[0, a]$  telle que  $f(0) = 0$ , pour tout  $x \in ]0, a[$ ,  $0 < f(x) < x$ , et  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \lambda x^r + o(x^r)$  avec  $\lambda > 0$  et  $r > 1$ .

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 \in ]0, a[$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Alors,

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} (\lambda(r-1)n)^{\frac{1}{1-r}}.$$

**Application 2** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 \in ]0, 1]$  et  $u_{n+1} = \arctan(u_n)$ . On a

$$u_n \underset{+\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{2n}} + \frac{3\sqrt{6} \ln(n)}{80n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

- On commence par montrer que  $(u_n)$  converge bien vers 0 : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \in ]0, a[$  puisque  $u_0 \in ]0, a[$  et  $]0, a[$  est stable par  $f$ . Ainsi,  $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$ , et la suite  $(u_n)$  est (strictement) décroissante. Or,  $(u_n)$  est minorée par 0, donc par le théorème de la limite monotone,  $(u_n)$  converge. Si on note  $l \in [0, a[$  sa limite, alors d'après la relation de récurrence définissant  $(u_n)$ , on a  $l = f(l)$  donc  $l$  est un point fixe de  $f$ , et donc par hypothèse,  $l = 0$ .
- On cherche alors à donner un équivalent asymptotique de  $u_n$ , et pour cela on utilise le développement limité de  $f$  en 0 : Comme  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , on a

$$u_{n+1} = f(u_n) \underset{+\infty}{=} u_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r) \quad \text{i.e.} \quad u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{=} -\lambda u_n^r + o(u_n^r)$$

On reconnaît dans le membre de gauche la dérivée discrète de la suite  $(u_n)$ , donc on peut légitimement regarder l'équation différentielle analogue  $y' = -\lambda y^r$ . Si  $y$  ne s'annule pas, on obtient  $y'y^{-r} = -\lambda \Rightarrow (\frac{y^{1-r}}{1-r})' = -\lambda \Rightarrow y^{1-r} = \lambda t(r-1) + C$ .

Ainsi, une solution de cette EDO est donnée par  $y(t) = (\lambda t(r-1))^{-\frac{1}{r-1}}$ . On peut donc espérer obtenir un équivalent de  $(u_n)$  sous la forme annoncée.

- Montrons pour cela que  $u_n^{1-r} \underset{+\infty}{\sim} \lambda n(r-1)$  en utilisant des résultats sur les séries.

On regarde donc la suite  $(u_n^{1-r})$  comme la série des incréments  $u_{k+1}^{1-r} - u_k^{1-r}$ . Tous les petits  $o$  qui suivent sont pour  $k \rightarrow +\infty$ .

$$u_{k+1}^{1-r} - u_k^{1-r} = (u_k - \lambda u_k^r + o(u_k^r))^{1-r} - u_k^{1-r} = u_k^{1-r} \left( (1 - \lambda u_k^{r-1} + o(u_k^{r-1}))^{1-r} - 1 \right)$$

Comme  $r - 1 > 0$ , on a  $u_k^{r-1} \rightarrow 0$ , donc on peut utiliser le DL en 0 suivant :  $(1+x)^{1-r} = 1 + (1-r)x + o(x)$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} u_{k+1}^{1-r} - u_k^{1-r} &= u_k^{1-r} \left( 1 + (1-r)(-\lambda u_k^{r-1} + o(u_k^{r-1})) + o(-\lambda u_k^{r-1}) - 1 \right) \\ &= u_k^{1-r} ((r-1)\lambda u_k^{r-1} + o(u_k^{r-1})) \\ &= (r-1)\lambda + o(1) \\ &\underset{+\infty}{\sim} (r-1)\lambda > 0 \end{aligned}$$

Le membre de gauche est positif par décroissance de  $(u_n)$  et puisque  $1-r < 0$ . De plus, la série  $\sum_k (r-1)\lambda$  est divergente, donc il en est de même de la série  $\sum_k (u_{k+1}^{1-r} - u_k^{1-r})$  et on a équivalence entre les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^{1-r} - u_k^{1-r}) = u_n^{1-r} - u_0^{1-r} \underset{+\infty}{\sim} \lambda(r-1)n = \sum_{k=0}^{n-1} (r-1)\lambda$$

On obtient donc  $u_n^{1-r} \underset{+\infty}{\sim} \lambda(r-1)n$ , d'où  $u_n \underset{+\infty}{\sim} (\lambda(r-1)n)^{\frac{1}{1-r}}$ .

- **Application :** Pour retrouver le DL en 0 de  $\arctan$ , on utilise le DL suivant :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

En intégrant, on obtient  $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$ . Comme  $\arctan(0) = 0$ , et pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $0 < \arctan(x) < x$  par concavité, les conditions de l'énoncé sont bien vérifiées avec  $\lambda = \frac{1}{3} > 0$  et  $r = 3 > 1$ . On obtient donc

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{3}2n\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2n}{3}}$$

- Pour obtenir le terme suivant dans le développement asymptotique de  $u_n$ , on

utilise le terme suivant du DL de arctan en 0, en reprenant le calcul mené dans le cadre général :

$$\begin{aligned} u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2} &\underset{+\infty}{=} \left( u_k - \frac{u_k^3}{3} + \frac{u_k^5}{5} + o(u_k^5) \right)^{-2} - u_k^{-2} \\ &\underset{+\infty}{=} u_k^{-2} \left( \left( 1 - \frac{u_k^2}{3} + \frac{u_k^4}{5} + o(u_k^4) \right)^{-2} - 1 \right) \end{aligned}$$

On utilise alors le même développement limité que tout à l'heure en le poussant un terme plus loin :  $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + \frac{-2(-3)}{2}x^2 + o(x^2) = 1 - 2x + 3x^2 + o(x^2)$  :

$$\begin{aligned} u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2} &\underset{+\infty}{=} u_k^{-2} \left( 1 - 2 \left( -\frac{u_k^2}{3} + \frac{u_k^4}{5} + o(u_k^4) \right) + 3 \left( -\frac{u_k^2}{3} + \frac{u_k^4}{5} + o(u_k^4) \right)^2 + o(u_k^4) - 1 \right) \\ &\underset{+\infty}{=} u_k^{-2} \left( \frac{2}{3}u_k^2 - \frac{2}{5}u_k^4 + \frac{1}{3}u_k^4 + o(u_k^4) \right) \\ &\underset{+\infty}{=} \frac{2}{3} - \frac{1}{15}u_k^2 + o(u_k^2) \end{aligned}$$

On obtient donc  $u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{3} - \frac{1}{15}u_k^2 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{15} \frac{3}{2k} = -\frac{1}{10k}$ . Comme le terme  $-\frac{1}{10k}$  ne change pas de signe, et que c'est le terme général d'une série divergente (la série harmonique), on a équivalence entre les sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2} - \frac{2}{3} = u_n^{-2} - u_1^{-2} - \frac{2n}{3} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} -\frac{1}{10k}$$

Or,  $\frac{1}{k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$  donc  $\frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$ . À nouveau, comme le signe est constant et par divergence de la série harmonique, on a équivalence entre les sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n)$$

Ainsi, on obtient  $u_n^{-2} - \frac{2n}{3} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{10}$  i.e  $u_n^{-2} \underset{+\infty}{=} \frac{2n}{3} - \frac{\ln(n)}{10} + o(\ln(n))$ .

Finalement :

$$\begin{aligned} u_n &\underset{+\infty}{=} \left( \frac{2n}{3} - \frac{\ln(n)}{10} + o(\ln(n)) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\underset{+\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{2n}} \left( 1 - \frac{3 \ln(n)}{20n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\underset{+\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{2n}} \left( 1 + \frac{3 \ln(n)}{40n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right) \\ &\underset{+\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{2n}} + \frac{3\sqrt{6} \ln(n)}{80n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

**Commentaires** : Ce développement est (uniquement) calculatoire. Il n'y a pas de difficulté particulière, il faut juste éviter de se perdre dans les calculs. Il n'y a pas besoin de détailler autant, mais aller trop vite peut mener à des coquilles donc faut se méfier.